Fonctions affines

Les fonctions affines font partie des fonctions mathématiques dites « usuelles ».
Comme le montre l'exemple proposé, ces fonctions se rencontrent dans des situations économiques de la vie courante.
Elles sont utilisées dès les chapitres 3 et 4 de l'ouvrage ; il est recommandé d'étudier soigneusement ce pré-requis qui permet de réviser :

- la notion et les notations utilisées pour les variables
- la notion de fonction et de représentation de fonction
- la notion de coefficient directeur (pente) d'une droite

Cet exemple sera aussi utilisé pour une révision de techniques de calcul algébrique (pré-requis 3)

1) Exemple de fonction affine

Les taxis au départ d'un aéroport pratiquent le tarif suivant pour un client seul :

- 5 euros de prise en charge
- 1,25 euros par km parcouru

Par exemple, pour un trajet de 20 km, le coût pour un client sera :

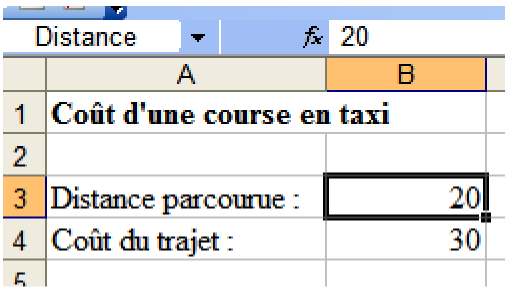
$$1{,}25 \times 20 + 5 = 30 \text{ euros}$$

Evidemment le coût du trajet **dépend** de la distance du trajet ; on dit qu'il est **fonction** de la distance, et dans le cas présent, il est facile d'écrire la formule de cette fonction.

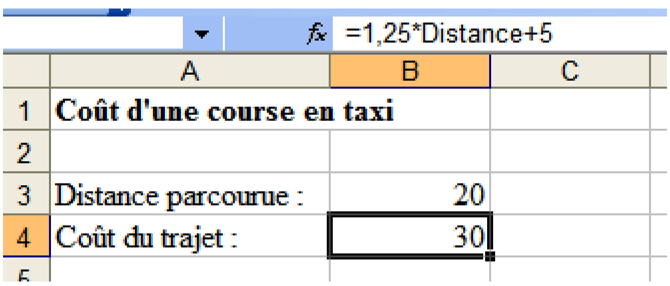
Une première manière d'écrire cette formule est la suivante :

$$\text{COUT} = 1{,}25 \times \text{Distance} + 5$$

C'est d'ailleurs le type de formule que l'on utilise sur tableur, après avoir donné un nom à la cellule contenant la distance parcourue :


Distance | fx 20

	A	B
1	Coût d'une course en taxi	
2		
3	Distance parcourue :	20
4	Coût du trajet :	30
5		


fx =1,25*Distance+5

	A	B	C
1	Coût d'une course en taxi		
2			
3	Distance parcourue :	20	
4	Coût du trajet :	30	
5			

En mathématiques, on utilise des formules sous une forme différente :
on convient de noter x la variable distance ; noter que toute autre lettre que x pourrait aussi bien être choisie ; mais l'habitude est d'utiliser la lettre x lorsqu'il n'y a qu'une seule variable.
On convient aussi de noter f la fonction coût (là encore, toute autre lettre, minuscule ou majuscule, pourrait être choisie), et on note f(x) le coût correspondant à un trajet de x km. On sait déjà que f(20) = 30.

Il est important de bien comprendre la signification de la parenthèse utilisée dans ce contexte :

f(20) est le coût du trajet pour une distance de 20 km.

Ne pas confondre !

5 (20 + 4) = 5 × 24 = 120

Dans ce cas, la parenthèse indique qu'on fait le produit de 5 par l'expression inclue dans la parenthèse.

Quand on écrit f(20) où f est une fonction, la parenthèse n'indique par un produit, mais la valeur de la fonction pour la valeur de la variable dans la parenthèse.

Avec les notations qui viennent d'être introduites, le coût f(x) d'un trajet de x km est :

$$f(x) = 1{,}25\ x + 5$$

A droite du signe = l'expression 1,25 x désigne le produit : 1,25 × x

Une autre notation de ce produit est 1,25 . x (avec le point), mais habituellement on ne met aucun signe pour le produit d'un nombre par une variable représentée par une lettre.

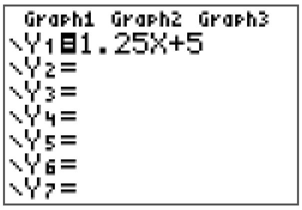
On retiendra que :

1,25 x désigne le produit de 1,25 par x

C'est d'ailleurs une convention qui est adoptée sur les calculatrices, ce que l'on va tout de suite vérifier :

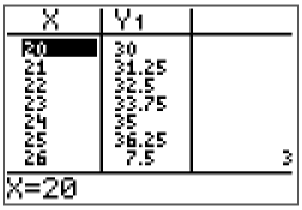
La touche **f(x)** permet d'accéder à l'écran de définitions des fonctions. Il est possible de mémoriser plusieurs fonctions (6, ou souvent 10, ou plus selon les modèles), nommées Y_1, Y_2, etc.

Si des définitions de fonction sont déjà entrées, les effacer à l'aide de la touche **annul**, puis taper 1.25X+5 en face su signe égal situé après Y1, comme ci-contre.



On obtient Y_1=1.25X+5 qui est l'équivalent calculatrice de la notation mathématique f(x) = 1,25 x + 5.

On va maintenant afficher et observer des valeurs de la fonction pour des distances à partir de 20km, de 1 en 1. Pour cela **2nde/déftable** permet de choisir les paramètres pour la table à afficher, puis **2nde/table** affiche les valeurs de la fonction. On obtient :



La fonction f définie par f(x) = 1,25 x + 5 est une fonction définie par f(x) = a x + b, avec a = 1,25 et b = 5.

Une telle fonction est appelée fonction affine.

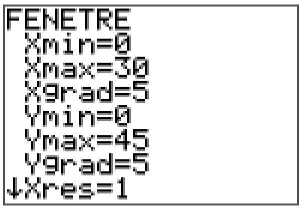
2) Représentation graphique de la fonction affine de l'exemple

La représentation graphique de la fonction est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient la relation :

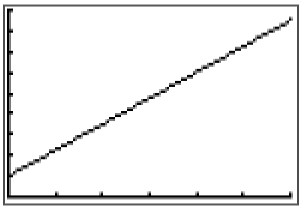
$$y = 1{,}25\ x + 5$$

Cette représentation graphique est une droite.

Pour l'obtenir sur la calculatrice, il faut commencer par choisir la fenêtre. Par exemple il est raisonnable de construire la représentation graphique pour des distances comprises entre 0 et 30 km. Puisque f(30) = 45,5, on pourra choisir la fenêtre suivante :

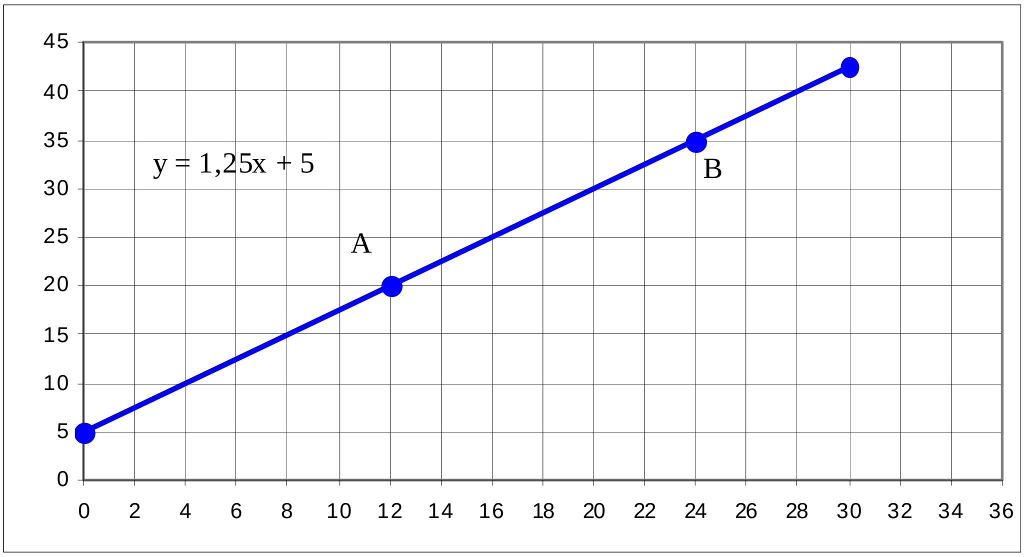


fenêtre



graphe

En regardant de près, on constate que la représentation graphique affichée par la calculatrice ressemble plus à un escalier qu'à une droite, à cause de la faible résolution graphique des calculatrices. On obtient mieux sur tableur, par exemple :



4 points de cette droite ont été mis en évidence : (0 ;5), (12 ; 20), (24 ; 35) et (30 ; 42,5)

Pour la tracer à la main et à la règle dans un repère, il suffit de 2 points, par exemple les points A(12 ; 20) et B(24 ; 35).

3) Interprétation graphique des coefficients a et b d'une fonction affine

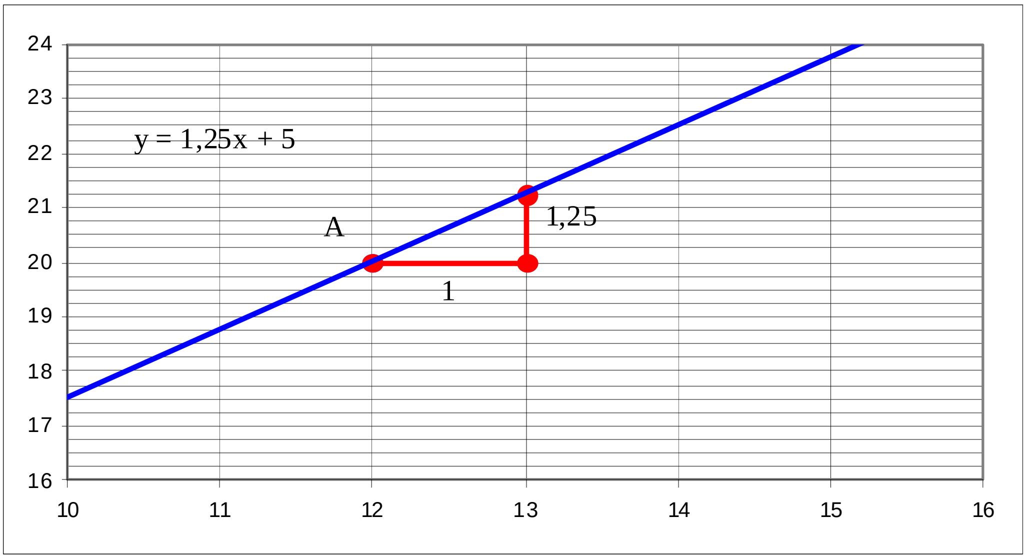
Quand on remplace x par 0 dans l'équation y = 1,25 x + 5, on obtient évidemment 5.
Le point de la droite situé sur l'axe des ordonnées à donc une ordonnée b = 5

Pour cette raison :

le coefficient b d'une fonction affine f définie par f(x) = a x + b est appelé **ordonnée à l'origine**

Dans l'exemple étudié, le coefficient a = 1,25 est le coût pour chaque km parcouru.
C'est aussi le coût supplémentaire à payer pour chaque km supplémentaire effectué.

Par exemple, quand on passe d'un trajet de 12 km à un trajet de 13 km, le coût du trajet passe de 20 à 21,25 euros. C'est ce qui est représenté sur la figure ci-dessous, obtenue en effectuant un zoom autour du point A(12 ;20).



En partant du point A d'abscisse 12 sur la droite, on rejoint le point d'abscisse 13 de la droite en se déplaçant de 1 à droite, et de 1,25 vers le haut (attention aux unités de la représentation graphique, qui sont définies par les graduations choisies pour la représentation).

On peut dire aussi que a = 1,25 représente de combien on « monte » quand on se déplace de 1 vers la droite.

le coefficient a d'une fonction affine f définie par f(x) = a x + b est appelé **pente ou coefficient directeur** de la droite

4) Calcul du coefficient directeur d'une droite passant par 2 points

Si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points de la droite d'équation y = a x + b, on a les deux relations :

(1) $y_A = a\,x_A + b$
(2) $y_B = a\,x_B + b$

et en faisant la différence (2) – (1), on obtient :

$$y_B - y_A = a\,x_B + b - (a\,x_A + b) = a\,x_B - a\,x_A = a\,(x_B - x_A)$$

et il en résulte :

$$\boxed{a = \text{coefficient directeur} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}}$$

5) Equation d'une droite passant par 2 points

Par exemple pour trouver l'équation y = a x + b de la droite passant par les points :
A(12 ; 20) et B(24 ; 35)

on commence par calculer le coefficient directeur :

$$a = \frac{35 - 20}{24 - 12} = \frac{15}{12} = 1{,}25$$

puis on exprime que la droite passe par le point A, donc :
$$20 = 1{,}25 \times 12 + b \text{ d'où } b = 20 - 15 = 5$$

Et de manière générale, on a $b = y_A - a\,x_A$
ce qui permet aussi de donner la propriété ci-dessous :

6) Equation d'une droite de pente a passant par un point A

L'équation de la droite de pente a et passant par A(x_A ; y_A) est : $y = a\,x + (y_A - a\,x_A)$

On peut retenir cette équation sous l'une des 2 formes suivantes :

$$y = a\,(x - x_A) + y_A$$

ou

$$y - y_A = a\,(x - x_A)$$