Résolution d'inéquations du 1^{er} degré

Les règles de calcul sont aussi simples que les règles n°1 et 2 qui ont été vues pour les équations. Toutefois il y a une précaution généralement bien connue des étudiants à prendre pour la multiplication d'une inéquation par un nombre négatif.

1) Exemple de résolution d'une inéquation du 1er degré pas à pas

Une équation du premier degré est le type d'équation le plus simple à résoudre, et se rencontre sur des exemples de la vie quotidienne.

On reprend ici la situation traitée dans le pré-requis 1 :

le coût f(x) d'un trajet de x km en taxi est : $f(x) = 1{,}25\ x + 5$

Pour quelle distance le prix à payer pour le trajet parcouru sera-t-il inférieur à 40 € ?

Cela revient à résoudre l'inéquation : $1{,}25\ x + 5 \leqslant 40$

Comme pour les équations, une inéquation se résout en effectuant des transformations successives, qui permettent progressivement de remplacer l'inéquation donnée par une inéquation plus simple.

On utilise ici deux règles de calcul qui sont rappelés dans les encadrés.

étape 1

en ajoutant – 5 aux deux membres de l'égalité

$$1{,}25\ x + 5 \leqslant 40$$

On obtient :

$$1{,}25\ x + 5 - 5 \leqslant 40 - 5$$

soit :

$$1{,}25\ x \leqslant 40 - 5$$

donc :

$$1{,}25\ x \leqslant 35$$

étape 2

en divisant les deux membres de cette dernière égalité par 1,25, on obtient enfin :

$$x \leqslant \frac{35}{1{,}25} = 28$$

Règle n° 3

Quand on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une inégalité,
on obtient une inégalité de même sens.

Règle n° 4

Quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif,
on obtient une inégalité de même sens.

2) Présentation usuelle des calculs

Quand on résout une inéquation du 1er degré, il n'y a habituellement pas lieu de rappeler les règles de calcul utilisées, ni de détailler toutes les étapes. Par exemple on pourra écrire directement :

$$1{,}25\ x + 5 \leqslant 40$$

équivaut à :

$$1{,}25\ x \leqslant 35$$

d'où :

$$x \leqslant \frac{35}{1{,}25} = 28$$

3) Deuxième exemple

Le modèle le plus simple utilisé par les économistes pour décrire l'impact du prix de vente d'un produit sur la quantité vendue est le modèle affine :

$$\mathbf{q(p) = a\ p + b}$$

dans lequel
- p désigne le prix de vente (on utilise donc ici la lettre p au lieu de la lettre x, mais cela ne change rien aux techniques de calcul)
- q(p) désigne la quantité vendue (sur un certain marché, et sur une période fixée)
- a est un nombre le plus souvent négatif (la quantité vendue diminue quand le prix de vente augmente)

Un exemple est étudiée au chapitre 4. On va suppose ici que :

$$q(p) = -240\ p + 12\ 000 \text{ pour p compris entre 1 et 50 euros}$$

Pour quelle valeur de p la quantité est-elle supérieure à 5 000 ?

Cela revient à résoudre l'inéquation :

$$-240\ p + 12\ 000 \geqslant 5\ 000$$

d'où (règle n°3) :

$$-240\ p \geqslant -7\ 000$$

Pour isoler p, on doit donc diviser par – 240, ce qui nécessite de changer le sens de l'inégalité.

On obtient :

$$p \leqslant \frac{-7000}{-240} = \frac{700}{24} \simeq 29{,}167$$

Comme un prix de vente est habituellement exprimé en euros au centime près,
Il faudra donc choisir un prix compris entre 1 € et 29,16 € pour obtenir une quantité supérieure à 5000.

Règle n° 5

Quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif,
on obtient une inégalité de sens contraire.

Remarques

1) La solution mathématique de l'inéquation est bien donnée par $p \leqslant \frac{700}{24}$ (avec en outre la condition $p \geqslant 1$ par hypothèse, parce qu'on ne veut pas vendre ce produit pour moins que 1 €). Dans la pratique, on doit évidemment afficher un tarif en euros et centimes d'euros, ce qui conduit à remplacer la solution exacte par une valeur approchée par défaut avec 2 décimales.
On peut noter que la valeur 29,17 ne convient pas puisque f(29,17) = 4 999,2 < 5 000, alors que f(29,16) = 5 001,6 remplit la condition $\geqslant$ 5 000.

2) La valeur exacte $\frac{700}{24}$ pourrait être remplacée par la fraction simplifiée $\frac{175}{6}$ (on a divisé numérateur et dénominateur par 4)

On peut obtenir cette fraction simplifiée à l'aide de la calculatrice, en calculant le quotient $\frac{700}{24}$ puis en exprimant le résultat approché sous forme de fraction à l'aide de la séquence **math/Frac/Entrer**

```
700/24
        29.16666667
Rép▸Frac
              175/6
```

3) Il arrivera fréquemment qu'une valeur obtenue pour la solution d'une équation ou d'une inéquation, ou la valeur d'une fonction, ne puissent être exprimés par un nombre décimal. Dans ce cas on donne une valeur approchée en utilisant le symbole $\backsimeq$ au lieu du signe = (voir le pré-requis 5 : « calculs numériques »).

4) Cet exemple montre aussi les précautions d'interprétation indispensables quand on utilise un modèle mathématique pour traduire une situation économique ou de gestion :

ainsi on a trouvé une quantité f(29,16) = 5 001,6 qui remplit bien la condition d'être supérieure à 5 000, mais qui n'est pas un entier, alors que le plus souvent ce sont des objets qui sont vendus, et donc en quantité entière.

5) Noter enfin que la règle n° 5 est une conséquence des règles n° 3 et 4.
En effet si l'on part de l'inégalité :

$$-240\,p \geqslant -7\,000$$

on peut ajouter 240 p + 7 000 aux deux membres de l'inégalité et on obtient :

$$-240\,p + 240\,p + 7\,000 \geqslant -7\,000 + 240p + 7\,000$$

donc :

$$7\,000 \geqslant 240p$$

Qui est la même inégalité que : $240p \leqslant 7\,000$

Exercices

1) Résoudre l'équation $f(x) \geqslant 300$ sachant que $f(x) = 30\,x + 100$
2) Résoudre l'équation $f(x) \leqslant 100$ sachant que $f(x) = 400 - 4\,x$

Solutions : 1) $x \geqslant 20/3$ 2) $x \geqslant 75$