Proportionnalité et fonctions linéaires

La proportionnalité intervient dans des situations de gestion élémentaire et doit être bien maîtrisée en GEA. Une des manières d'exprimer la proportionnalité est de recourir à la notion de fonction linéaire, qui est un cas particulier de fonctions affines.

1) Exemple 1. Coût d'un plein d'essence : proportionnalité

On suppose que le prix du litre d'essence dans une station service est de 1,25 €.

a) quel sera le montant à payer pour un plein de 32 litres ?
b) quelle quantité d'essence peut-on obtenir pour 20 € ?

Les réponses sont intuitivement évidentes :

a) montant à payer pour 32 litres = $32 \times 1{,}25 = 40$ €
b) quantité délivrée pour 20 € = $\dfrac{20}{1{,}25}$ = 16 litres.

Résumons les résultats dans un tableau :

Quantité	Montant à payer
16	20
32	40

× 2 ÷ 2

× 1,25

La deuxième ligne s'obtient à partir de la première ligne en la multipliant par 2, et la deuxième colonne s'obtient à partir de la première colonne en la multipliant par 1,25.

Dans ce tableau, les lignes sont proportionnelles entre elles, ainsi que les colonnes. Chaque ligne (colonne) est le produit de l'autre ligne (colonne) par un coefficient :
on dit que le tableau est un tableau de proportionnalité.

On constate aussi l'égalité des produits en diagonale :

$$16 \times 40 = 32 \times 20 = 640$$

On peut exprimer cette propriété par la règle du

produit en croix

rappelé ci-contre, et qui est aussi la base de la

règle de trois.

Règle n° 5

Dans un tableau de proportionnalité à 2 lignes et 2 colonnes, on obtient une égalité quand on fait le produit en croix.

2) Utilisation de la proportionnalité

Dans une autre station-service, un automobiliste a payé 21 € pour 15 litres. Que devra-t-il payer pour un plein de 37 litres ?

On a donc le tableau de proportionnalité :

Quantité	Montant à payer
15	21
37	x

dans lequel x représente le prix à payer pour 37 litres.

La règle n°5 permet d'écrire :

$$15\,x = 37 \times 21$$

ce qui donne :

$$x = \frac{37 \times 21}{15} = 51{,}80 \text{ €}$$

La règle de trois permet d'écrire directement cette dernière égalité. Cette règle de trois est à retenir de manière visuelle, à l'aide des deux diagonales du tableau.

Règle n° 6

Dans un tableau de proportionnalité à 2 lignes et 2 colonnes, un coefficient inconnu d'une diagonale est égal au produit des deux coefficients de l'autre diagonale, divisé par le **troisième** coefficient connu (diagonale de l'inconnue).

Exercice : dans la même station-service, pour le même carburant, quelle est la quantité achetée pour un montant de 59,36 € ?

Le tableau est le suivant :

Quantité	Montant à payer
15	21
x	59,36

et il en résulte :

$$x = \frac{15 \times 59{,}36}{21} = 42{,}4 \text{ litres}$$

3) Utilisation d'une fonction linéaire

Pour un prix du litre d'essence de 1,25 €, désignons par un f(x) le prix à payer pour un achat de x litres d'essences. On a :

$$f(x) = 1,25\ x$$

On dit que la fonction f est une fonction linéaire, car elle est définie par une formule du type :

$$f(x) = a\ x$$

C'est un cas particulier d'une fonction affine f définie par f(x) = a x + b, avec b = 0.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

La grande différence entre fonction linéaire et fonction affine est que la fonction linéaire se traduit par la proportionnalité, ce qui n'est pas le cas pour une fonction affine, comme le montrent les tableaux ci-dessous :

x	1,25 x
16	20
32	40

x	1,25 x + 5
16	25
32	45

Dans le tableau de droite, 32 est le double de 16, mais 45 n'est pas le double de 25.

4) Calcul algébrique sur les proportions

Aussi bien la règle de trois que le produit en croix sont des conséquences de la règle n°2 énoncée dans le pré-requis n°2. L'application de cette règle n°2 à une égalité :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ où a, b, c, d, sont 4 nombres non nuls}$$

permet d'obtenir par exemple : a.d = b.c en multipliant les deux membres de l'égalité par le produit b.d, puis en simplifiant.

On rencontre souvent des égalités du type $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dans lesquelles a, b, c, et d sont remplacés par des expressions algébriques plus complexes. Les règles de calcul sont les mêmes et peuvent être retenues à l'aide du schéma suivant :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Les deux diagonales de ce schéma ne veulent pas dire qu'on a barré l'égalité, mais que l'on garde une égalité quand on échange les positions des coefficients sur une diagonale, ou que l'on fait le produit des coefficients d'une diagonale.

Il en résulte la règle n°7 utile dans les résolutions d'équations comportant des fractions.

Règle n°7

a, b, c, et d désignent 4 nombres non nuls. Toutes les égalités ci-dessous sont équivalentes :

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
2) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4) a.d = b.c
5) $a = \frac{b \times c}{d}$
6) $b = \frac{a \times d}{c}$
7) $c = \frac{a \times d}{b}$
8) $d = \frac{b \times c}{a}$

Remarque : il n'est pas question d'apprendre par cœur ces 8 égalités. Par contre il est utile d'observer que chacune des égalités s'obtient à partir de la première en retenant que :

Règle n°7 bis. Etant donnée une relation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on obtient une égalité quand on échange les positions des coefficients sur une diagonale, ou que l'on fait le produit des coefficients d'une diagonale.
Cette règle s'applique aussi quand on remplace un ou plusieurs des 4 nombres par des expressions algébriques, à condition que ces expressions ne soient pas nulles !

5) Exemple 2. Taux de change des monnaies et inverse d'un nombre.

Un autre exemple type de proportionnalité, ou de fonction linéaire, est la conversion des monnaies.

On trouve en ligne des convertisseurs, par exemple à l'adresse :
www.xe.com/fr/currencyconverter/

On verra un tableau des taux de change comme celui-ci (actualisé en permanence, car les cours varient constamment) :

Actualisation automatique 12x 0 : 11		USD	EUR	GBP	INR	AUD	CAD	ZAR	NZD	JPY
	1 EUR	1,12481	1,00000	0,85006	75,3313	1,50346	1,48492	16,0434	1,54644	115,143
	Inverse :	0,88904	1,00000	1,17639	0,01327	0,66513	0,67344	0,06233	0,64664	0,00868
	1 USD	1,00000	0,88904	0,75574	66,9725	1,33664	1,32015	14,2632	1,37485	102,366
	Inverse :	1,00000	1,12481	1,32321	0,01493	0,74815	0,75749	0,07011	0,72735	0,00977

Supposons qu'un jour donné, le cours de l'euro soit de 1,12481 dollars.

Le montant f(x) en dollars dont on peut disposer en contrepartie de x euros est donc :

$$f(x) = 1{,}12481\ x$$

Inversement, quelle est la fonction qui exprime le montant que l'on pourra obtenir en euros pour x dollars ?

euros	dollars
1	1,12481
?	1

Le montant en euros obtenu pour 1 dollar est $\frac{1}{1{,}12481} \simeq 0{,}88904$, comme indiqué dans le tableau en bas de la page précédente sur la ligne « inverse ».

La fonction g exprimant le montant en euros que l'on obtient pour x dollars est donc :

$$g(x) = 0{,}88904\ x$$

On remarquera que $1{,}12\,481 \times 0{,}88\,904 = 1$: ces deux nombres sont dits inverses l'un de l'autre.

Avec une calculatrice, deux méthodes sont possibles pour obtenir l'inverse.

Il est conseillé d'utiliser la deuxième méthode, avec la touche de calcul de l'inverse d'un nombre :
1.12481 suivi de la touche $\mathbf{x^{-1}}$

```
1/1.12481
        .8890390377
1.12481^-1
        .8890390377
Rép*1.12481
                  1
```

Remarque : dans la pratique, le montant obtenu dans la transaction n'est donné ni par la fonction f, ni par la fonction g, à cause des commissions et frais de change.