Calculs numériques sur calculatrice

En économie et gestion, les valeurs numériques utilisées sont le plus souvent des valeurs entières, dans l'unité choisie. Par exemple un budget d'entreprise, ou celui d'un état, sera donné en milliers, ou millions, ou milliards d'euros (ou toute autre devise).

Le recours aux nombres décimaux est souvent fréquent aussi. Par exemple une facture d'achat est donnée au centime près : 123,54 €. Certains tarifs sont donnés au dixième de centimes près, par exemple le litre d'essence affiché 1,344 euros. Le cours d'une devise est donné avec davantage de décimales (voir pré-requis 4, et ci-dessous).

Le recours à la calculatrice fait partie des habitudes pour tous les calculs numériques. On donnera ici quelques rappels sur les valeurs numériques, et sur les précautions à prendre dans l'utilisation des calculatrices.

1) Les nombres décimaux

Ce sont les nombres qui s'expriment avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
Par exemple 32,5566 et 1,987654321 sont des décimaux.

Certaines fractions peuvent être exprimées de manière exacte par un nombre décimal, par exemple :

$\frac{3}{4} = 0,75$ $\qquad$ $\frac{315}{32} = 9,84375$

Si la dernière fraction est le montant moyen des achats de 32 personnes dans une supérette, on donnera plutôt le résultat au centime d'euro près :

9,84 est la valeur par défaut à 10^{-2} près, et 9,85 la valeur par excès à 10^{-2} près.

Valeur approchée

$10^{-2} = 0,01$
9,85 est une valeur approchée de 9,84375 à 10^{-2} près par excès car :
$9,85 - 9,84375 = 0,00625 < 10^{-2}$
Et de même
9,84 est une valeur approchée de 9,84375 à 10^{-2} près par défaut car :
$9,84375 - 9,84 = 0,00375 < 10^{-2}$

Parmi tous les nombres utilisés en mathématiques, les nombres décimaux sont « assez peu nombreux » (en un sens qu'il n'est pas utile de définir rigoureusement ici).
Par exemple $\sqrt{2}$, ln(3), e (base du logarithme népérien), π, ou même $\frac{32}{7}$ ne sont pas des nombres décimaux.

2) Les nombres rationnels

Ce sont les quotients de deux entiers, comme par exemple $\frac{315}{32}$, ou $\frac{32}{7}$, ou $\frac{2017}{365}$

Lorsque la fraction est irréductible et que le dénominateur est un nombre de la forme $2^m \times 5^n$, ce quotient est un nombre décimal. Dans les autres cas, on obtient un développement illimité périodique. Par exemple :

$\frac{10}{9}$ = 1,1111111111111111.etc (indéfiniment 1 après la virgule)

$\frac{2}{3}$ = 0,6666666666666666.etc (indéfiniment 6 après la virgule)

$\frac{32}{7}$ = 4,571428571428571428571428.etc (séquence 571428 indéfiniment répétée)

Mais autant il est possible « d'imaginer » une succession indéfinie de chiffres après la virgule, surtout s'ils sont tous identiques, ou s'ils ont une régularité périodique, autant il est impossible pratiquement pour une calculatrice de faire des calculs avec des développements illimités.

Et pour un usage d'économie ou de gestion, les résultats sont habituellement donnés avec un nombre décimal approché, avec la précision voulue. Par exemple à 10^{-5} près :

$$\frac{10}{9} \simeq 1,11111$$

mais on prend soin d'utiliser le signe ≃ (à peu près égal) à la place du signe =, puisque

$$9 \times 1,11111 = 9,99999 \text{ qui est différent de } 10$$

3) Les calculs « approchés » réalisés par une calculatrice

Toutes les calculatrices sont évidemment bien conçues, et on peut se fier aux résultats obtenus dans la plupart des cas. Il est toutefois utile de tester sur quelques exemples des résultats qui peuvent paraître surprenants mais qui sont lieux aux limitations de la puissance de ces outils de calcul.

1er exemple

2/3
0.6666666667
Rép-2/3
0
0.6666666667-2/3
$3.333\text{E}^{-}11$

Le calcul de la fraction 2/3 donne une valeur approchée avec 10 décimales (9 fois le chiffre 6 après la virgule, puis 7).
Rép-2/3 calcule 2/3 – 2/3 et il est donc normal de trouver une différence nulle.
Par contre lorsqu'on entre la valeur 0,6666666667 manuellement pour calculer la différence avec 2/3, la calculatrice ne donne pas la valeur 0, mais
$3.333\text{E}^{-}11 = 3,333 \times 10^{-11}$ = 0,00000000003333 qui n'est pas 0 !

Pourquoi la calculatrice obtient-elle 0 dans un cas, et pas dans l'autre, bien que la valeur affichée utilisée semble être la même : 0,6666666667?

L'explication est la suivante : la calculatrice peut afficher au maximum 10 chiffres (ici 10 chiffres après la virgule), mais fait les calculs avec davantage de décimales :
quand la calculatrice affiche 0,6666666667 en réponse au calcul de 2/3, la valeur stockée dans la mémoire de la calculatrice est en réalité une valeur avec une précision

meilleure que 10^{-10}, que le programme de la calculatrice sait identifier comme étant la fraction 2/3.

On peut encore vérifier cette explication par la manipulation suivante :

La séquence **Maths/Frac** permet d'afficher un résultat sous forme de fraction, quand c'est possible. Par exemple ci-contre.

```
9,84375▸Frac
              315/12
```

Cette séquence appliquée à la valeur *affichée* en résultat du calcul de 2/3 donne bien la fraction 2/3.

Par contre cette même séquence appliquée à la valeur 0.6666666667 *saisie manuellement* ne peut pas être convertie en fraction.

Mais si l'on *saisit manuellement* un valeur approchée à 10^{-14} près (13 fois le chiffre 6après la virgule, puis7), la calculatrice reconnaît la fraction.

```
2/3
        0.6666666667
Rép▸Frac
                 2/3
0.6666666667▸Frac
        0.6666666667
0.66666666666667▸
Frac
                 2/3
```

2^{ème} exemple

On va tester la précision de la calculatrice avec un exemple encore plus simple.

Il est évident que 1,05 – 1 = 0,05

Que se passe-t-il si l'on remplace 0,05 par une valeur plus proche de 0 ? Par exemple 0,0000005 (le 5 est en 7ème position)
On obtient l'affichage 5E⁻7 qui est la notation calculatrice pour 5×10^{-7} dont l'expression décimale est : 0,0000005.

```
1.05-1
                0.05
1.0000005-1
                5E-7
```

On va remplacer par des valeurs 0.05 par des valeurs encore plus petites. Par exemple ci-contre.

Pour éviter de compter les 0 avant le 5 significatif, il est plus simple d'écrire 1,000000000005 sous la forme : $1 + 5 \times 10^{-12}$
et la calculatrice donne bien comme attendu :

$1 + 5 \times 10^{-12} - 1 = 5 \times 10^{-12}$

```
1.000000000005-1
               5E-12
1+5E-12-1
               5E-12
```

Mais le même calcul en remplaçant 12 par 13 donne 0.

```
1+5E-13-1
                   0
```

Autrement dit la calculatrice ne peut pas calculer exactement 1,000 000 000 000 5 – 1
alors que la réponse est évidente : c'est 0,000 000 000 000 5

Autrement dit encore, la calculatrice ne sait pas distinguer les valeurs :

0,000 000 000 000 5 et 0

On a atteint avec ce calcul pourtant simple la limite de précision de calcul de la calculatrice.

4) Les nombres qui ne sont pas des rationnels

Les nombres rationnels (quotients de deux entiers) sont des nombres décimaux, ou bien ont des développements illimités mais périodiques.

Il y a beaucoup d'autres nombres, que l'on rencontre, comme $\sqrt{2}$, ln(3), e (base du logarithme népérien), π, déjà mentionnés. Ces nombres ont des développements illimités, le plus souvent sans aucune régularité.

La calculatrice affiche une valeur approchée décimale, et stocke dans sa mémoire une valeur plus précise. L'exemple ci-contre montre une fois encore la limite de précision des calculatrices. Ce n'est pas parce que la calculatrice affiche le même carré que l'on peut en conclure que 1, 4142132622 et 1, 4142132625 sont égaux !

√(2
1.414213262
Rép^2
2
1.414213262^2
1.999999999
1.4142132622^2
2
1.4142132625^2
2
1.4142132626^2
2.000000001

5) Précautions à prendre dans la conduite des calculs

Les quelques situations qui viennent d'être expérimentées montrent qu'on ne peut pas faire une confiance aveugle aux résultats affichés par la calculatrice, et qu'il est indispensable de bien contrôler la manière dont on conduit les calculs.

En particulier, quand on doit enchaîner plusieurs calculs successifs, il faut éviter de remplacer les valeurs obtenues par des valeurs approchées, même en retapant toutes les décimales affichées par la calculatrice !

On constate un écart d'environ 3735 quand on remplace la quotient 32/7 par une valeur approchée à 10^{-3} près dans le calcul ci-contre.

32/7
4.571428571
(32/7)^10
3985835.612
4.571^10
3982100.467