Calculs sur les puissances
Racine $n^{ème}$ d'un nombre

1) Puissance entière d'un nombre

La notation puissance est bien connue ; par exemple :

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

2^10	
	1024
3^2	
	9
$Rép^3$	
	729

De manière générale, pour tout nombre a (positif ou négatif), et tout entier n positif :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}_{\text{produit de a par lui-même n fois}}$$

Les calculatrices disposent de :

- Une touche particulière pour calculer les carrés (puissance 2)
- Une fonction particulière pour calculer les cubes (puissance 3) : **math/3**
- La touche ^ qui peut être utilisée pour tous les calculs de puissance

2) Propriété fondamentale n°1 de calcul sur les puissances

La propriété fondamentale de calcul sur les puissances est très simple à comprendre ; elle est très importante et aura une généralisation avec les fonctions exponentielles.

L'exemple suivant :

$$2^3 \times 2^4 = \underbrace{\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 fois}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{4 fois}}}_{\text{7 fois}} = 2^7$$

Peut s'écrire :

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$$

Le même raisonnement appliqué à un nombre a quelconque,
et des entiers positifs n et m, permet d'écrire :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

3) Conséquence 1 : définition de a^0

Si a est un nombre non nul, la propriété fondamentale appliquée en choisissant m = 1 et n = 0 permet d’écrire :

$$a^1 \times a^0 = a^1$$

donc :

$$a \times a^0 = a$$

et en simplifiant par a, on obtient :

pour tout nombre non nul a : $a^0 = 1$

Noter qu’il est indispensable de supposer a non nul :

$0^n = 0$ évidemment
mais 0^0 ne peut pas être défini de manière simple et naturelle ; on observe que la calculatrice refuse ce calcul qui pose problème (voir fin de ce pré-requis)

0^5	
	0
3^0	
	1
0^0	
ERR : DOMAINE	

4) Conséquence 2 : notation a^{-1} pour l’inverse d’un nombre a

Si a est un nombre non nul, la propriété fondamentale appliquée en choisissant m = –1 et n = 1 permet d’écrire :

$$a^{-1} \times a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$$

autrement dit :

$$a^{-1} \times a = 1$$

donc :

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ pour tout nombre $a \neq 0$

Sur TI, la touche x^{-1} après saisie du nombre permet de calculer son inverse

Sur Casion la fonction inverse x^{-1} s’obtient par la séquence **shift/)**

1/2	
	0.5
2^{-1}	
	0.5
10^{-1}	
	0.1

5) Conséquence 3 : définition de a^n pour les entiers négatifs n

La formule $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ définit a^n pour l’entier négatif n = – 1. Pour pouvoir étendre la définition de a^n aux entiers n négatifs, en cohérence avec la propriété fondamentale n°1, on convient donc de poser :

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pour tout nombre a non nul et tout entier n (positif ou négatif)

Avec cette définition de a^n pour n négatif, on peut maintenant énoncer la propriété fondamentale n°1 dans sa forme définitive :

En désignant par a un nombre non nul, et par m et n deux entiers (positifs ou négatifs), on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

6) Utilisation des puissances de 10

Les puissances de 10 sont utilisées par les calculatrices pour l'affichage des nombres très grands, ou très petits (proches de 0)

10^5	
	100000
10^9	
	1000000000
10^10	
	1E10

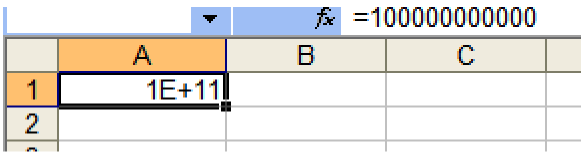
L'écriture décimale de 10^n quand n est positif est :

1 suivi de n zéros.

Comme l'affichage de la calculatrice est limité à 10 chiffres, la calculatrice peut afficher 10^9 sous la forme 1 000 000 000 (1 milliard) mais ne peut pas afficher 10^{10} sous la forme :

10 000 000 000 (10 milliards).

La calculatrice utilise donc la notation 1E10, qui est donc simplement une autre manière d'écrire 10^{10}



Cette notation n'est d'ailleurs pas particulière aux calculatrices ; elle est utilisée dans de nombreux outils logiciels, et notamment sur le tableur excel. Toutefois c'est à partir de 100 milliards qu'excel a recours à cette notation.

Il est conseillé encore de tester les exemples ci-contre, qui montrent comment utiliser la notation E. Cette notation est accessible ainsi :

E5	
	100000
4.123 E4	
	41230
321500 E5	
	3.215 E10

TI : **2nde/,** La touche , est au dessus de la touche 7, avec l'indication EE

Casio : touche unique directe **×10^x** (en bas du clavier)

On a par exemple : 4.123 E4 = $4{,}123 \times 10^4$ = 41 230

De même l'écriture décimale de 321500 E5 = 321500×10^5 s'obtient en écrivant 5 zéros supplémentaires à droite : 32 150 000 000

La calculatrice ne peut pas afficher ce nombre sous cette forme ; ce nombre comporte dix chiffres à droite à partir de 2, autrement dit 32 150 000 000 = $3{,}215 \times 10^{10}$

Les puissances négatives de 10 permettent d'exprimer les nombres très proches de 0, comme expérimenté ci-contre.

0.0001	
	1 E-4
0.1234 E-2	
	.001234
0.1234 E-3	
	1,234 E-4

7) Propriété fondamentale n°2 de calcul sur les puissances

L'exemple suivant permet de comprendre cette 2$^{\text{ème}}$ propriété fondamentale :

$$(2^3)^4 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{\text{4 fois le produit } (2 \times 2 \times 2)}$$

On observe que $(2^3)^4$ est le produit de 2 par lui-même 4 × 3 fois, autrement dit :

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4}$$

La propriété générale est la suivante :

En désignant par a un nombre non nul, et par n et p deux entiers (positifs ou négatifs), on a :

$$(a^p)^n = a^{p \times n}$$

8) Racine n$^{\text{ème}}$ d'un nombre positif

Il est bien connu qu'une équation du type $x^2 = 3$ admet deux solutions qui sont :

$$-\sqrt{3} \text{ et } +\sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$ (lire racine carrée de 3) est l'unique nombre positif dont le carré est 3 :

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

De la même manière :

quand A est un nombre positif, et n un entier positif, on appelle racine n$^{\text{ème}}$ de A, et on note $\sqrt[n]{A}$ l'unique nombre positif a pour lequel $a^n = A$:

l'unique solution positive a de l'équation $x^n = A$ est $a = \sqrt[n]{A}$

Exemples :

$4^3 = 64$ donc $\sqrt[3]{64} = 4$

$2^5 = 32$ donc $\sqrt[5]{32} = 2$

Calculer une racine n$^{\text{ème}}$ ne peut pas se faire facilement à la main ! Le recours à la calculatrice est indispensable : toutes les calculatrices disposent des fonctions racine cubique, et racine n$^{\text{ème}}$ accessibles soit par le menu **maths** (TI), soit par des touches directes (Casio).

Toutefois, c'est une autre méthode qui sera recommandée, car beaucoup plus facile d'utilisation, surtout quand plusieurs calculs doivent être effectués successivement (c'est le cas en particulier des calculs financiers qui font beaucoup recours aux racines n$^{\text{ème}}$).

9) Calcul de la racine $n^{ème}$ d'un nombre positif

La méthode de calcul recommandée repose sur une $2^{ème}$ notation pour le nombre racine $n^{ème}$: $\sqrt[n]{A}$

On va provisoirement admettre que la formule $(a^p)^n = a^{p \times n}$ reste valable quand p et n ne sont pas des entiers (voir ci-dessous en fin de ce pré-requis).

Si on applique cette formule en remplaçant a par A et en choisissant p = , on obtient :

$$\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A^{\frac{1}{n}\times n} = A$$

Par définition, le contenu de la parenthèse est précisément le nombre racine $n^{ème}$ de A, et on a donc :

$$\boxed{\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}}$$

Cette formule donne un moyen simple de calcul, comme on peut le voir ci-contre.
Puisque 1/3 est l'inverse de 3, la racine $3^{ème}$ de 64 se calcule encore plus simplement en tapant successivement : **64/^/3/x^{-1}**
Ce qui permet de faire l'économie des parenthèses et de la division.

64^(1/3)	
	4
64^3^{-1}	
	4
32^5^{-1}	
	2

Dans les calculs financiers, on aura souvent n = 12 (12 mois dans l'année)

1.025^12^{-1}	
	1.002059836

10) Calcul de a^n quand n n'est pas entier

On vient de voir que la calculatrice calcule a^n quand l'entier n est remplacé par son inverse 1/n. Quelques essais montrent qu'on peut remplacer l'entier n par n'importe quel nombre positif ou négatif.

35^1.24	
	82.15696265
64^-0.42	
	.1743429583

Evidemment une telle puissance ne peut plus être définie comme on l'a fait au 1). La formule utilisée par la calculatrice est la suivante :

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

La définition de a^b nécessite donc le recours à la fonction exponentielle et à la fonction logarithme, et n'est possible que lorsque a est un nombre strictement positif, puisque ln(a) n'est défini que pour a > 0.
NB : le message d'erreur renvoyé par la calculatrice indique qu'il y a cependant une (des) réponses possibles, mais il s'agit de nombres complexes, sans utilisation courante en économie ou gestion.

(-2)^3.1
ERR : REP NONREEL