Logarithmes des nombres

Les logarithmes des nombres positifs sont une grande invention du début du 17ème siècle. A cette époque, ni calculatrice, ni tableur. Tous les calculs sont effectués à la main.

Pour les additions, pas de problème : les calculs sont simples et rapides. Il n'en est pas de même des multiplications, qui demandent des calculs longs et fastidieux. L'idée des mathématiciens de l'époque, en particulier John Napier (Neper), et Henry Briggs, est de remplacer le calcul d'un produit par le calcul d'une somme.

Cette méthode de calcul utilisant les tables de logarithmes faisait partie des programmes de terminale, jusque dans les années 1970, avant l'apparition et la démocratisation des calculatrices, et de tous les outils de calcul informatique.

Les logarithmes ne sont plus utilisés maintenant pour le calcul du produit de deux nombres, mais restent indispensables pour modéliser certaines situations (voir le chapitre 5), pour la représentation graphique de données ayant des ordres de grandeur très différents, et comme outil de calcul pour résoudre les équations et inéquations dans lesquelles l'inconnue est un exposant (exemples ci-dessous).

1) La propriété fondamentale des logarithmes sur un exemple

Comment calculait-on un produit avec les logarithmes, avant apparition des outils de calcul informatique ?

Le tableau ci-contre est extrait d'une table qui était utilisée dans les classes de terminale avant l'utilisation des calculatrices.

En face de chaque entier n, on lit le logarithme dans la colonne lg n.
Par exemple on a :

log 4 = 0,60 206 00

et :

log 12 = 1,07 918 12

n	lg n	n	lg n	n	lg n
0	- ∞	20	1,30 103 00	40	1,60 206 00
1	0.00 000 00	1	2 221 93	1	1 278 39
2	30 103 00	2	4 242 27	2	2 324 93
3	47 712 13	3	6 172 78	3	3 346 85
4	60 206 00	4	8 021 12	4	4 345 27
5	0,69 897 00	5	1,39 794 00	5	1,65 321 25
6	77 815 13	6	1,41 497 33	6	6 275 78
7	84 509 80	7	3 136 38	7	7 209 79
8	90 309 00	8	4 715 80	8	8 124 12
9	0,95 424 25	9	6 239 80	9	9 019 61
10	1,00 000 00	30	1,47 712 13	50	1,69 897 00
1	04 139 27	1	1,49 136 17	1	1,70 757 02
2	07 918 12	2	1,50 515 00	2	1 600 33
3	11 394 34	3	1 851 39	3	2 427 59
4	14 612 80	4	3 147 89	4	3 239 38
5	1,17 609 13	5	1,54 406 80	5	1,74 036 27
6	20 412 00	6	5 630 25	6	4 818 80
7	23 044 89	7	6 820 17	7	5 587 49
8	25 527 25	8	7 978 36	8	6 342 80
9	27 875 36	9	1,59 106 46	9	7 085 20
20	1,30 103 00	40	1,60 206 00	60	1,77 815 13

On effectue l'addition :

$$\begin{array}{r} \log 4 = 0{,}60\ 206\ 00 \\ +\ \log 12 = 1{,}07\ 918\ 12 \\ \hline \log 4 + \log 12 = 1{,}68\ 124\ 12 \end{array}$$

En cherchant maintenant la valeur 1,68 124 12 dans une colonne lg n, on observe que cette valeur est le logarithme de 48, et on conclue que $4 \times 12 = 48$

On vient d'observer sur cet exemple que :

$$\log(4 \times 12) = \log 4 + \log 12$$

ce que l'on vérifie facilement sur la calculatrice, à l'aide de la touche log : on notera que les valeurs sont affichées avec davantage de décimales que celles que l'on pouvait lire dans la table.

```
log(4
          .6020599913
log(12
          1.079181246
Ans+log(4
          1.681241237
log(48
          1.681241237
```

La calculatrice dispose d'une deuxième fonction logarithme accessible par la touche ln, et pour laquelle on vérifie de la même manière que :

$$\ln(4 \times 12) = \ln 4 + \ln 12$$

```
ln(4)+ln(12)
          3.871201011
ln(48
          3.871201011
```

2) Propriété fondamentale des logarithmes

Une fonction logarithme log associe à chaque nombre positif **a** un nouveau nombre noté log(**a**), de telle sorte que pour tous nombres positifs a et b on ait :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \qquad (1)$$

Autrement dit : le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes.

C'est cette propriété qui a fait des logarithmes, pendant plusieurs siècles, l'outil privilégié des calculs de produits (et quotients), avant l'avènement de l'ère informatique. Ainsi pour calculer 4×12 :

- on calcule log 48 à partir de log 4 et log 12 par addition de ces deux logarithmes
- on obtient 1,681241237
- puis on cherche l'unique nombre dont le logarithme est 1,681241237
- c'est 48, et on en déduit que $4 \times 12 = 48$

Cette méthode repose donc sur une deuxième propriété fondamentale :

Etant donnée une fonction logarithme log, tout nombre A (positif ou négatif) est le logarithme d'un nombre a positif.

Sur les calculatrices, ce nombre s'obtient en faisant précéder la touche log (ou ln) utilisée par la touche 2nde
Les notations affichées par la calculatrice quand on utilise 2nde/log ou 2nde/ln sont expliquées au pré-requis 9 (fonctions exponentielles).

```
log(4)+log(12)
          1.681241237
10^(Ans
                   48
```

Remarque : évidemment cette manière de calculer les produits qui a été utilisée pendant un peu plus de trois siècles n'est plus d'actualité avec l'avènement des outils numériques. Pourtant les logarithmes sont toujours l'outil incontournable pour résoudre certains types d'équations ou d'inéquations, comme on le verra au 4), en s'appuyant sur une propriété qui est une conséquence immédiate de la propriété fondamentale.

3) Conséquence de la propriété fondamentale des logarithmes

En choisissant b = a dans la formule fondamentale, on obtient :

$$\log(a \times a) = \log(a) + \log(a) \text{ autrement dit : } \log(a^2) = 2\log(a)$$

Puis en remplaçant maintenant a par a^2 et b par a dans la formule fondamentale, on obtient :

$$\log(a^2 \times a) = \log(a^2) + \log(a) \text{ autrement dit : } \log(a^3) = 2\log(a) + \log(a) = 3\log(a)$$

En répétant cette démarche, on vérifie de proche en proche que :

$$\boxed{\log(a^n) = n\log(a) \text{ pour tout nombre a positif et tout entier } n \geqslant 1 \qquad (2)}$$

4) Utilisation des logarithmes pour résoudre une inéquation dont l'inconnue est une exposant.

On va traiter successivement 3 exemples d'inéquations, dans lesquelles l'inconnue n doit être un entier. Les deux premiers exemples sont donnés à titre de révision des règles n°3 et 4 rappelées dans le pré-requis 3.

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $1{,}2 + n \geqslant 125$, dans laquelle n doit être entier

Cette inéquation revient à : $n \geqslant 125 - 1{,}2 = 123{,}8$ (cf règle n°3)
Puisque n doit être entier, on doit choisir : $n \geqslant 124$

Exemple 2 : résoudre l'inéquation $1{,}2 \times n \geqslant 125$, dans laquelle n doit être entier

Cette inéquation revient à : $n \geqslant 125 / 1{,}2 \simeq 104{,}17$ (cf règle n°4)
Puisque n doit être entier, on doit choisir : $n \geqslant 105$

Exemple 3 : résoudre l'inéquation $1{,}2^n \geqslant 125$, dans laquelle n doit être entier

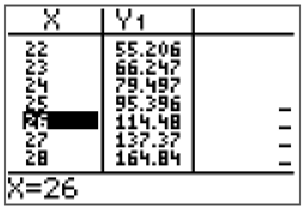
Méthode 1. On utilise la calculatrice, et on fait des essais de calcul de $1{,}2^n$ pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

1.2^10	
	6.191736422
1.2^20	
	38.33759992
1.2^26	
	114.47546
1.2^27	
	137.370552

On observe que $1{,}2^n \geqslant 125$ pour $n \geqslant 27$

Remarque : les essais successifs sont une méthode de résolution indispensable pour certaines équations ou inéquations, et de nombreux calculs sont obtenus ainsi sur les calculatrices.

Méthode 2. Plutôt que des essais successifs, il est plus rapide d'entrer la fonction
Y1 = 1.2^X et d'afficher la table avec un pas de 1 à partir de 1
On observe que $1,2^{26} \simeq 114,48$ et $1,2^{27} \simeq 137,37$



On a donc $1,2^n \geqslant 125$ pour $n \geqslant 27$

Méthode 3 : utilisation du logarithme

La règle de calcul ci-contre ressemble aux règles n°3 et 4 vues au pré-requis 3. Elle sera revue de manière plus précise dans le pré-requis 8 fonction logarithmes.
Cette règle permet de remplacer l'inéquation à résoudre $1,2^n \geqslant 125$ par la nouvelle inéquation :

$$\log 1,2^n \geqslant \log 125$$

Règle n° 8

Quand on remplace les deux membres (supposés positifs) d'une inégalité par leurs logarithmes, on obtient une inégalité de même sens

En utilisant la propriété (2) des logarithmes, on obtient l'inéquation :

$$n \log 1,2 \geqslant \log 125$$

On peut vérifier que $\log 1,2 > 0$, et en appliquant la règle n°4, on obtient :

$$n \geqslant \frac{\log 125}{\log 1,2} \simeq 26,48$$

log(125)/log(1.2)
26.48240736
ln(125)/ln(1.2)
26.48240736

d'où $n \geqslant 27$ puisque n doit être entier

On vérifie facilement que le résultat obtenu avec la fonction logarithme ln est le même.

La différence et l'utilité de chacune de ces deux fonctions logarithmes est expliquée dans le pré-requis 8.