

La méthode des moindres carrés

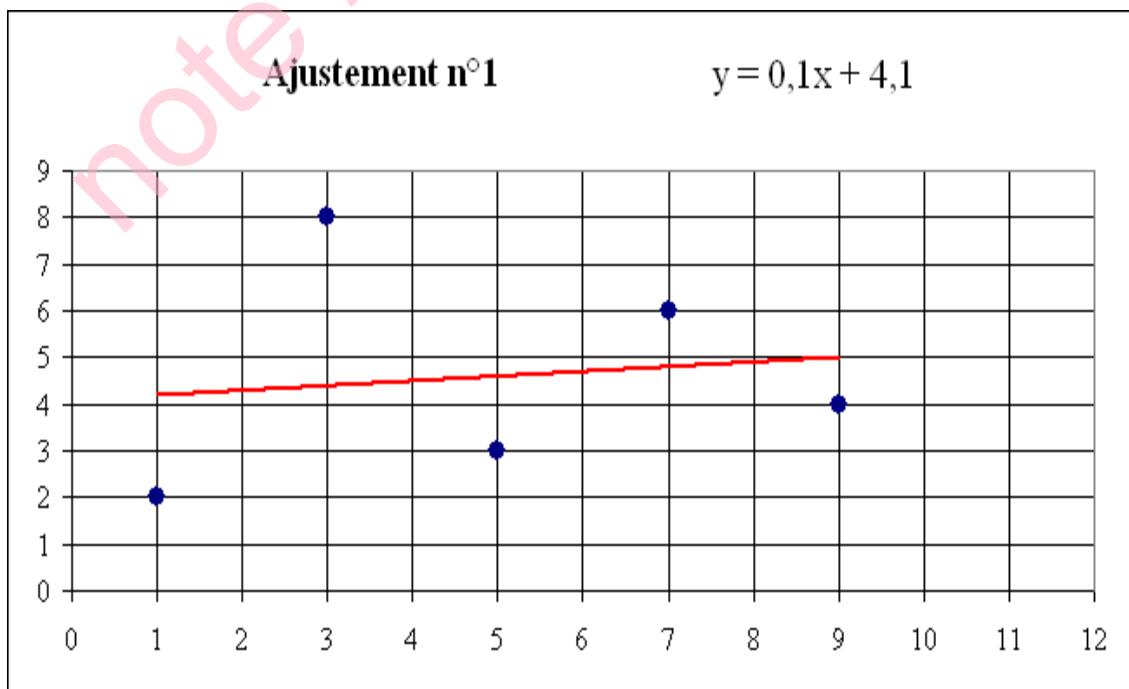
C'est habituellement une méthode des « carrés des écarts » qui est retenue pour mesurer l'écart d'une droite par rapport à un nuage de points. Cette méthode va être présentée sur l'exemple d'un nuage de 5 points, dont les coordonnées figurent dans les 2 premières colonnes du tableau ci-dessous.

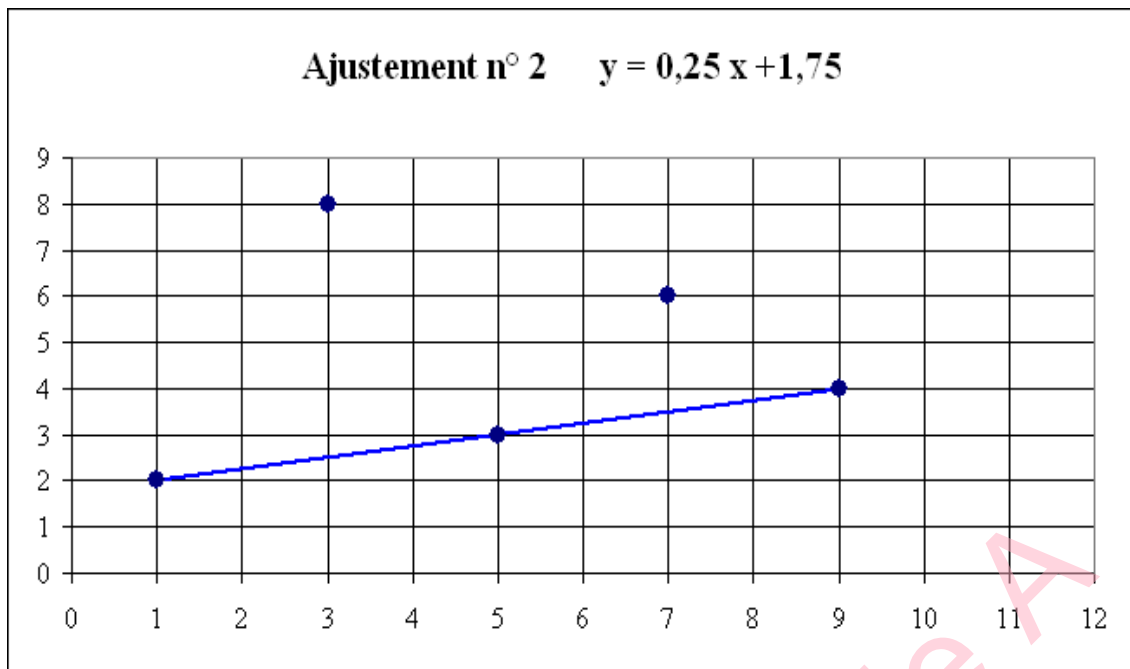
Données observées		ajustement $y = 0,1x + 4,1$			ajustement $y = 0,25x + 1,75$		
valeurs X	valeurs Y	valeurs théoriques $\hat{y}_i$	écarts e_i	carrés des écarts	valeurs théorique $\hat{y}_i$	écarts e_i	carrés des écarts
1	2	4,20	-2,20	4,84	2	0,00	0
3	8	4,40	3,60	12,96	2,5	5,50	30,25
5	3	4,60	-1,60	2,56	3	0,00	0
7	6	4,80	1,20	1,44	3,5	2,50	6,25
9	4	5,00	-1,00	1,00	4	0,00	0
		Total	0,00	22,80	Total	8,00	36,50

La manière dont la première droite a été déterminée sera expliquée plus loin ; la deuxième droite passe par les 3 points d'abscisses 1, 5, 9.

Les figures ci-dessous sont à compléter en notant les points du nuage M_1, M_2 , jusque M_5 et en notant $P_1, P_2, \dots, P_5$ les points situés sur la droite à la même abscisse que les points correspondants $M_1, M_2, \dots, M_5$.

Les ordonnées des points P_i sont les valeurs théoriques $\hat{y}_i = a x_i + b$ pour chacune des deux droites. Pour chacune des deux droites, ces ordonnées sont calculées dans le tableau.





Pour chacune des deux figures, on dispose donc de deux nuages de points :
 $M_i(x_i ; y_i)_{1 \leq i \leq 5}$ et $P_i(x_i ; \hat{y}_i)_{1 \leq i \leq 5}$ et on appelle **écart** entre un point du nuage M_i et le point P_i la différence :

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = \text{valeur observée} - \text{valeur théorique} = \overline{P_i M_i}$$

On convient alors habituellement que :

$$\text{la somme des carrés des écarts } \sum_{i=1}^{i=n} e_i^2$$

mesure l'écart entre la droite et le nuage des points

Pour chacun des deux ajustements, les écarts et leurs carrés sont calculés dans le table, et la somme qui mesure l'écart entre droite et nuage est calculée sur la dernière ligne.

Au sens cette « mesure de l'écart », la droite de l'ajustement n°1 est plus proche des points du nuage que la droite d'ajustement n°2, puisque $22,80 < 36,50$.

Sur la figure de l'ajustement n°1, le point P_3 a pour coordonnées (5 ; 4,6). Il est facile de vérifier que la moyenne des abscisses des points M_i est $\bar{x} = 5$ et que la moyenne des ordonnées est $\bar{y} = 4,6$. On observe donc que la droite de cet ajustement passe par le point de coordonnées $(\bar{x} ; \bar{y})$ appelé point moyen du nuage.

Utilisation de la calculatrice pour obtenir les coordonnées du point moyen :

Abscisses X dans la liste L_1 et ordonnées Y dans la liste L_2

stats/CALC/Stats 2-Var L_1, L_2 calcule les paramètres statistiques séparément pour les X de la liste 1 et pour les Y de la liste 2

On lit directement $\bar{x} = 5$ et plus bas : $\bar{y} = 4,6$.

Sur Casio, **Calc/2VAR** après avoir réglé **2Var XList : List1** et **2Var YList : List2** avec le choix SET

La droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On peut admettre sans démonstration la propriété suivante :

Etant donnée une série statistique double (X ; Y) représentée par le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe une unique droite (D) d'équation $y = ax + b$ pour laquelle la mesure $\sum_{i=1}^n e_i^2$ de l'écart entre la droite et le nuage est la plus petite possible.

Cette droite est appelée droite d'ajustement affine de Y et X obtenue par la méthode des moindres carrés, ou encore droite de régression de Y en X.

Cette unique droite (D) vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) (D) passe par G, point moyen du nuage
- 2) pour cette droite (D) la somme des écarts est nulle : $\sum_{i=1}^n e_i = 0$

La démonstration de l'existence de cette droite d'ajustement repose sur les propriétés des fonctions trinôme du second degré. Elle est présentée par exemple dans l'ouvrage « Itinéraires en statistiques et probabilités », Editions Ellipse, pages 43 et 44 (Bibliographie [1])

Utilisation de la calculatrice pour calculer les écarts et la somme des carrés des écarts.

Après avoir saisi les données X et Y dans les liste 1 et 2, on commence par afficher l'équation de la droite comme indiqué page 42 :

stats/CALC/LinReg(ax+b) L₁,L₂

Outre les coefficients affichés à l'écran, la calculatrice a aussi calculé la liste des écarts dans une liste nommée RESID (les écarts sont aussi appelés des résidus). Pour afficher cette liste sur l'éditeur statistique, par exemple dans la liste L₃ :

Stats/Edite et curseur sur L₃

2nde/stats/RESID/entrer permet d'afficher les écarts (résidus) dans la liste 3, comme on le vérifie avec les valeurs du tableau de l'ajustement n°1, qui est celui de la méthode des moindres carrés.

Quitter l'éditeur statistique : **2nde/stats/MATH/somme(L₃)** permet de vérifier que la somme des écarts est nulle.

Retour à l'éditeur statistique, curseur sur L₄ : **L₃*L₃/entrer** permet de calculer les carrés des écarts.

Quitter l'éditeur statistique : **2nde/stats/MATH/somme(L₄)** permet de vérifier que la somme des carrés des écarts est 22,80.