

note 31 de la page 51

La démonstration des 3 propriétés énoncées en page 51 est l'occasion d'une révision de quelques propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles (voir partie pré-requis).

démonstration de la propriété 1) : dans un repère semi-logarithmique en abscisses, la représentation graphique d'une fonction f définie par $f(x) = a \ln(x) + b$, est une droite.

Dans le repère semi-logarithmique, on désigne par z la distance entre l'origine du premier module (une puissance positive ou négative de 10) et une abscisse x .

On a vu (page 50) que x est défini par une relation du type : $z = M \log(x)$, où M désigne la longueur (en cm) d'un module.

On sait d'autre part que : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

On peut donc écrire : $\ln(x) = \ln(10) \times \log(x) = \frac{\ln(10)}{M} z$

d'où :

$$f(x) = \frac{a \ln(10)}{M} z + b$$

Il en résulte que f est une fonction affine de z , et sa représentation graphique est donc une droite dans un repère dont les abscisses sont proportionnelles à z , ce qui est le cas du repère semi-logarithmique considéré.

démonstration de la propriété 2) : dans un repère semi-logarithmique en ordonnées, la représentation graphique d'une fonction f définie par $f(x) = K \cdot e^{ax}$ est une droite.

En désignant par z la distance entre l'origine du premier module (une puissance positive ou négative de 10) et une ordonnée y , on a cette fois :

$$\ln(y) = \ln(10) \times \log(y) = \frac{\ln(10)}{M} z$$

D'autre part l'équation de la courbe de la fonction f est :

$$y = K \cdot e^{ax}$$

ou :

$$\ln(y) = \ln K + ax$$

donc on a :

$$\frac{\ln(10)}{M} z = \ln K + ax$$

et enfin :

$$z = \frac{a M}{\ln(10)} x + \frac{M \ln(K)}{\ln(10)}$$

C'est l'équation d'une droite dans un repère dont les coordonnées sont proportionnelles à x (en abscisses) et à z (en ordonnées), ce qui est le cas du repère semi-logarithmique considéré.

démonstration de la propriété 3) : dans un repère logarithmique en abscisses et ordonnées, la représentation graphique d'une fonction f définie par $f(x) = c \cdot x^a$ est une droite.

En désignant par w la distance entre l'origine du premier module et une abscisse x , et par L la longueur d'un module en abscisses, on a :

$$\ln(x) = \frac{\ln(10)}{L} w$$

En désignant par z la distance entre l'origine du premier module et une ordonnée y , et par M la longueur d'un module en ordonnées, on a :

$$\ln(y) = \frac{\ln(10)}{M} z$$

L'équation $y = c \cdot x^a$ de la fonction f peut aussi s'écrire :

$$\ln(y) = \ln(c \cdot x^a) = \ln c + \ln x^a = \ln c + a \ln(x)$$

et il en résulte :

$$\frac{\ln(10)}{M} z = \ln c + a \frac{\ln(10)}{L} w$$

donc :

$$z = a \frac{M}{L} w + \frac{M \ln(c)}{\ln(10)}$$

C'est l'équation d'une droite dans un repère dont les coordonnées sont proportionnelles à w en abscisses et z en ordonnées, ce qui est le cas du repère doublement logarithmique considéré.

