

Changement de variable permettant d'obtenir l'ajustement logistique

Les notations sont celles de la page 63. Après le choix de la valeur de stabilisation c et après les changements de variables indiqués en 3) et 4) de l'encadré (procédure de changement de variable),

on obtient donc la série statistique double $(X ; V) = (x_i ; v_i)_{1 \leq i \leq n}$

S'il est pertinent de faire l'ajustement linéaire de V par rapport à X , on a :

$$v = A x + B \quad (1)$$

Le coefficient de corrélation linéaire r de V par rapport à X donnera la qualité de l'ajustement logistique de Y en X .

Les changements de variable effectués permettent d'écrire :

$$\ln \frac{z}{1-z} = A x + B$$

donc

$$\frac{z}{1-z} = e^{(A x + B)} \quad (2)$$

On va provisoirement poser : $X = \frac{z}{1-z}$

On a donc :

$$z = (1-z) X = X - z X$$

d'où

$$z (1 + X) = X$$

et finalement

$$z = \frac{X}{1+X} = \frac{1}{1 + \frac{1}{X}} \quad (3)$$

D'après (2) on a :

$$X = e^{(A x + B)} \text{ et donc } \frac{1}{X} = e^{-B} e^{-Ax}$$

En reportant cette valeur de $1/X$ dans (3), il vient :

$$z = \frac{1}{1 + e^{-B} e^{-Ax}}$$

et enfin :

$$y = c z = \frac{c}{1 + e^{-B} e^{-Ax}}$$

qui est bien de la forme voulue :

$$y = \frac{c}{1 + a e^{-bx}} \quad (4) \quad \text{avec } a = e^{-B} \text{ et } b = A$$